ПОПАРНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И K-$\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.С. Вегера

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь artem.vegera@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. О. Кегелем в работе [1] было предложено определение $\mathfrak{F}$-достижимой (согласно современной терминологии [2] K-$\mathfrak{F}$-субнормальной) подгруппы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Следуя идее О. Кегеля, в работе [3] было введено следующее

Определение 1. Подгруппа H группы G называется K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается H K-$\mathbb{P}$-sn G), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

Если $H = G$ или в указанной выше цепи индекс $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$, то H называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G [4].

Очевидно, что всякая субнормальная подгруппа является K-$\mathbb{P}$-субнормальной. Обратное утверждение в общем случае неверно [3].

Свойства $\mathbb{P}$-субнормальных и K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп и их приложения к изучению произведений $G = AB$ были рассмотрены в работах [3-5].

В настоящем сообщении изучается влияние K-$\mathbb{P}$-субнормальности на строение групп $G = G_1G_2 \cdots G_n$, представимых в произведение своих попарно перестановочных подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n.

Определение 2 [3]. Группа G называется $\overline{\mathrm{w}}$-сверхразрешимой, если любая ее силовская подгруппа является K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G.

В [3] было установлено, что класс всех $\overline{\mathrm{w}}$-сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию и состоит из дисперсивных по Оре групп.

Теорема 1. *Пусть $G = G_1G_2 \cdots G_n$ — произведение разрешимых попарно перестановочных подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n. Если подгруппы G_i K-$\mathbb{P}$-sn G_iG_j и G_j K-$\mathbb{P}$-sn G_iG_j для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, то G разрешима.*

Следствие 1 [3]. *Пусть $G = AB$ — произведение разрешимых подгрупп A и B. Если A K-$\mathbb{P}$-sn G и B K-$\mathbb{P}$-sn G, то G разрешима.*

Теорема 2. *Пусть $G = G_1G_2 \cdots G_n$ — произведение попарно перестановочных сверхразрешимых подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n. Если для любой пары $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, где $i \neq j$, подгруппа G_i K-$\mathbb{P}$-sn G_iG_j, подгруппа G_j K-$\mathbb{P}$-sn G_iG_j и коммутант группы G нильпотентет, то G сверхразрешима.*

Согласно [6] и [7] группа $G = AB$ называется произведением взаимно перестановочных (взаимно sn-перестановочных) подгрупп A и B, если A перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из B, а B перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из A.

Следствие 2 [8, с. 166]. *Пусть $G = G_1G_2 \cdots G_n$ — произведение попарно взаимно sn-перестановочных (взаимно перестановочных) сверхразрешимых подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n. Если коммутант группы G нильпотентет, то G сверхразрешима.*

Теорема 3. *Пусть $G = G_1G_2 \cdots G_n$ — произведение попарно перестановочных $\overline{\mathrm{w}}$-сверхразрешимых подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n. Если для любой пары $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, где $i \neq j$,* *подгруппа* G_i K-$\mathbb{P}$-*sn* G_iG_j, *подгруппа* G_j K-$\mathbb{P}$-*sn* G_iG_j *и индексы* $|G_iG_j : G_i|$ *и* $|G_iG_j : G_j|$ *взаимно просты, то* G $\overline{\mathrm{w}}$-*сверхразрешима.*

Следствие 3 [9]. *Пусть* $G = G_1G_2 \cdots G_n$ — *произведение попарно взаимно sn-перестановочных (взаимно перестановочных)* $\overline{\mathrm{w}}$-*сверхразрешимых подгрупп* $G_1, G_2, \ldots, G_n$. *Если для любой пары* $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, *где* $i \neq j$, *индексы* $|G_iG_j : G_i|$ *и* $|G_iG_j : G_j|$ *взаимно просты, то* G $\overline{\mathrm{w}}$-*сверхразрешима.*

Литература

1. Kegel O. H. *Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten* // Arch. Math. 1978. Bd. 30, № 3. S. 225–228.

2. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups.* Dordrecht: Springer, 2006.

3. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О* K-$\mathbb{P}$-*субнормальных подгруппах конечных групп* // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 4. С. 517–528.

4. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О конечных группах сверхразрешимого типа* // Сиб. мат. журн. 2010. V. 51, № 6. С. 1270–1281.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О произведениях* $\mathbb{P}$-*субнормальных подгрупп в конечных группах* // Сиб. мат. журн. 2012. V. 53, № 1. С. 59–67.

6. Assad M., Shaalan A. *On the supersolubility of finite groups* // Arch. Math. 1989. V. 53, № 4. P. 318–326.

7. Alejandre M., Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M. *On some permutable products of supersoluble groups* // Rev. Mat. Iberoamericana. 2004. V. 20. P. 413–425.

8. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of Finite Groups.* Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2010.

9. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Heliel A. A., Al-Shomrani M. M. *Some Results on Products of Finite Groups* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2015. DOI 10.1007/s40840-015-0111-7.